Toplam Hasar Modeli (Aggregate Loss Models)
1 Tanım – 1 Soru

1. Gerekli Dağılımlar, Hasar Adedi ve Büyüklüğü
2. Toplam Hasar Modeli
3. Bir Soru-Cevap

Hasar Adedi Rassal Değişkeni N:

$N \sim \text{Bin}(n, p)$ ise $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$N \sim \text{Pois}\ (\lambda)$ ise $P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

veya

$N \sim \text{NB}\ (r, \beta)$ ise $P(N = k) = \binom{r + k - 1}{k} p^r q^k$

N: Hasta sayısı, hasar adedi, müşteri sayısı vb…

Hasar büyüklüğü Rassal Değişkeni X:

$X \sim \text{Exp}\ (\theta)$ ise $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & diğer \end{cases}$

X: Hasar büyüklüğü ve iki olay arasında geçen zaman

Eğer $\lambda = \frac{1}{\theta}$, o halde

$X \sim \text{Exp}\ \left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$ ve $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & diğer \end{cases}$

Soru: Haftalık hasar sayısının, N, Pois $(\lambda = 5)$ ile hasar büyüklüklerinin ise, $X, Exp(\theta = 1000 \text{ TL})$ ile dağıldığı bir toplam hasar modelinde toplam hasarların %95'inin karşılanabilmesi için uygulanacak en düşük prim kaç TL olmalıdır? (Normal yaklaşım kullanılacaktır.)

Cevap:

$P(S < P) = 0.95$ ise $P = ?$

Normal yaklaşım prensibine göre:

$$P(S < P) = P\left(Z < \frac{P - \mu_S}{\sigma_S}\right) = 0.95 \text{ olmalıdır. Öyleyse:}$$

$$E[S] = E\big[E[S|N]\big] = E[E[X_1 + X_2 + \cdots + X_N|N]]$$

$$= E\big[E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_N]\big] = E\big[E[X] + E[X] + \cdots + E[X]\big]$$

$$= E\big[N \cdot E[X]\big] = E[N]E[X] = 5 \cdot 1000 = 5000.$$

$$V[S] = E\big[V[S|N]\big] + V\big[E[S|N]\big]$$

$$= E\big[V[X_1 + X_2 + \cdots + X_N|N]\big] + V\big[E[X_1 + X_2 + \cdots + X_N|N]\big]$$

$$= E\big[V[X] + V[X] + \cdots + V[X]\big] + V\big[E[X] + E[X] + \cdots + E[X]\big]$$

$$= E\big[N \cdot V[X]\big] + V\big[N \cdot E[X]\big] = E[N]V[X] + V[N]E^2[X]$$

$$= 5 \cdot 1000^{\,2} + 5 \cdot 1000^{\,2} = 10 \cdot 1000^{\,2}.$$

O halde:

$$P(S < P) = P\left(Z < \frac{P - 5000}{\sqrt{10 \cdot 1000^2}}\right) = 0.95$$

$$\frac{P - 5000}{3162.27} = 1.645$$

$$P = 10201.9 \text{ TL}$$